$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv 0 \ [2\pi]$

Ainsi

$$\left.\begin{array}{r} M_1 \in (\mathscr{C}') \\ M' \in (\mathscr{C}') \\ \widehat{\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM_1}\right)} \equiv 0 \ [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = M'.$$

Par suite $R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = M' \Rightarrow AM = AM' \Leftrightarrow \underline{A \in \text{méd}[MM']}$.

2/ $R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow AMM'$ est un triangle équilatéral direct

D'où H, projeté orthogonal de M sur (AM'), est le milieu de du segment $[AM']$.

Par suite $\left\{\begin{array}{l} AH = \frac{1}{2}AM \\ \widehat{\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AH}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow H = S(M).$

avec S est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$\left\{\begin{array}{l} H = S(M) \\ M \text{ décrit } (\mathscr{C}) \end{array}\right. \Leftrightarrow H$ décrit $(\mathscr{C}_1)$=S($(\mathscr{C})$) le cercle image de $(\mathscr{C})$

Construction de $(\mathscr{C}_1)$.

- $(\mathscr{C}_1)$ est de centre S(B) = B_1 le projeté orthogonal de B sur (AC) car C est l'image de B par $R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$.
- $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centre respectifs B et C et tangents exterieurement l'un à l'autre d'où le rayon de $(\mathscr{C})$ est $\frac{1}{2}$BC.

Donc le rayon de $(\mathscr{C}_1)$ est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$BC car S est de rapport $\frac{1}{2}$.

3/ $M''=R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)}(M') = R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M)$.

Or $R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$ est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

D'où $R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$ est une symétrie centrale .

$\boxtimes R_{\left(D,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B)$